

Μάθημα: **Στατική II**
 Διδάσκων: Τριαντ. Κόκκινος, Ph.D.

14 Φεβρουαρίου 2012

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

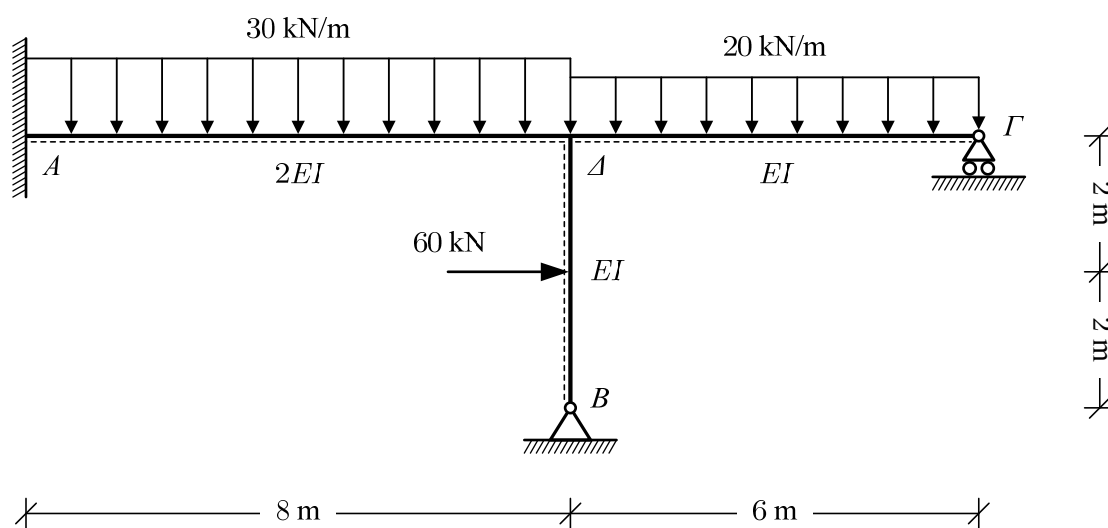
ΓΡΑΠΤΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

(1^η περίοδος χειμερινού εξαμήνου 2011-12)

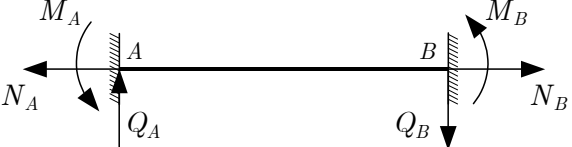
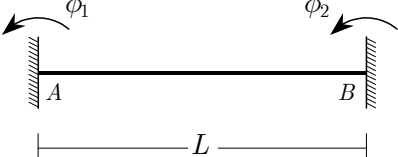
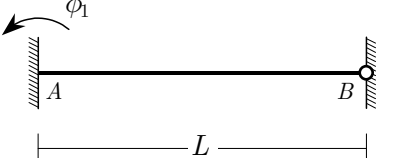
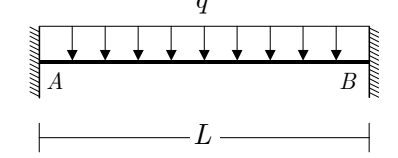
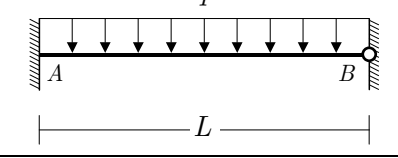
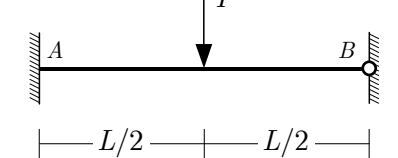
ΘΕΜΑ 1^ο (35%)

Να επιλυθεί ο υπερστατικός φορέας του σχήματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των παραμορφώσεων.

- (α) Να υπολογισθούν οι καμπτικές ροπές στα άκρα των τριών μελών του φορέα.
- (β) Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις A , B και Γ του φορέα.
- (γ) Να σχεδιασθεί το διάγραμμα ροπών του φορέα.
- (δ) Να προσδιορισθούν οι μέγιστες θετικές ροπές κάμψης.



Οι πίνακες με τις ακραίες δράσεις αμφιπάκτων και μονοπάκτων δοκών δίνονται στην επόμενη σελίδα.

ΑΚΡΑΙΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΜΟΝΟΠΑΚΤΩΝ ΚΑΙ ΑΜΦΙΠΑΚΤΩΝ ΜΕΛΩΝ	
	$M_A = \frac{2EI}{L}(2\phi_1 + \phi_2), \quad M_B = \frac{2EI}{L}(\phi_1 + 2\phi_2)$ $Q_A = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2), \quad Q_B = \frac{6EI}{L^2}(\phi_1 + \phi_2)$
	$M_A = \frac{3EI}{L}\phi_1$ $Q_A = \frac{3EI}{L^2}\phi_1, \quad Q_B = \frac{3EI}{L^2}\phi_1$
	$M_A = \frac{qL^2}{12}, \quad M_B = -\frac{qL^2}{12}$ $Q_A = \frac{qL}{2}, \quad Q_B = -\frac{qL}{2}$
	$M_A = \frac{qL^2}{8}$ $Q_A = \frac{5qL}{8}, \quad Q_B = -\frac{3qL}{8}$
	$M_A = \frac{3PL}{16}$ $Q_A = \frac{11P}{16}, \quad Q_B = -\frac{5P}{16}$

Επίλυση:

Άγνωστο μέγεθος παραμόρφωσης είναι μια αριστερόστροφη στροφή ϕ στο Δ .

Δοκός ΑΔ:

$$M_{A\Delta} = \frac{2(2EI)}{8}\phi + \frac{30 \cdot 8^2}{12} \Rightarrow M_{A\Delta} = \frac{EI\phi}{2} + 160$$

$$M_{\Delta A} = \frac{4(2EI)}{8}\phi - \frac{30 \cdot 8^2}{12} \Rightarrow M_{\Delta A} = EI\phi - 160$$

$$Q_{A\Delta} = \frac{6(2EI)}{8^2}\phi + \frac{30 \cdot 8}{2} \Rightarrow Q_{A\Delta} = \frac{3EI\phi}{16} + 120$$

$$Q_{\Delta A} = \frac{6(2EI)}{8^2}\phi - \frac{30 \cdot 8}{2} \Rightarrow Q_{\Delta A} = \frac{3EI\phi}{16} - 120$$

Δοκός AB:

$$M_{\Delta B} = \frac{3EI}{4}\phi + \frac{3 \cdot (-60) \cdot 4}{16} \Rightarrow M_{\Delta B} = \frac{3EI\phi}{4} - 45$$

$$Q_{\Delta B} = \frac{3EI}{4^2}\phi + \frac{11 \cdot (-60)}{16} \Rightarrow Q_{\Delta B} = \frac{3EI\phi}{16} - \frac{165}{4}$$

$$Q_{B\Delta} = \frac{3EI}{4^2}\phi - \frac{5 \cdot (-60)}{16} \Rightarrow Q_{B\Delta} = \frac{3EI\phi}{16} + \frac{75}{4}$$

Δοκός ΔΓ:

$$M_{\Delta\Gamma} = \frac{3EI}{6}\phi + \frac{20 \cdot 6^2}{8} \Rightarrow M_{\Delta\Gamma} = \frac{EI\phi}{2} + 90$$

$$Q_{\Delta\Gamma} = \frac{3EI}{6^2}\phi + \frac{5 \cdot 20 \cdot 6}{8} \Rightarrow Q_{\Delta\Gamma} = \frac{EI\phi}{12} + 75$$

$$Q_{\Gamma\Delta} = \frac{3EI}{6^2}\phi - \frac{3 \cdot 20 \cdot 6}{8} \Rightarrow Q_{\Gamma\Delta} = \frac{EI\phi}{12} - 45$$

Ισορροπία κόμβου Δ:

$$\Sigma M_{\Delta} = 0 \Rightarrow M_{\Delta A} + M_{\Delta B} + M_{\Delta\Gamma} = 0$$

$$\Rightarrow (EI\phi - 160) + \left(\frac{3EI\phi}{4} - 45\right) + \left(\frac{EI\phi}{2} + 90\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9EI\phi}{4} - 115 = 0 \Rightarrow \boxed{EI\phi = \frac{460}{9}}$$

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow Q_{\Delta A} + B_y - Q_{\Delta\Gamma} = 0 \Rightarrow \left(\frac{3EI\phi}{16} - 120\right) + B_y - \left(\frac{EI\phi}{12} + 75\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{48} \frac{460}{9} - 195 + B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = 189.68 \text{ kN}}$$

Κόμβος Α:

$$A_y = Q_{A\Delta} \Rightarrow A_y = \frac{3EI\phi}{16} + 120 = \frac{3}{16} \frac{460}{9} + 120 \Rightarrow \boxed{A_y = 129.58 \text{ kN}}$$

$$M_A = M_{A\Delta} \Rightarrow M_A = \frac{EI\phi}{2} + 160 = \frac{1}{2} \frac{460}{9} + 160 \Rightarrow \boxed{M_A = 185.56 \text{ kNm}}$$

(αριστερόστροφα)

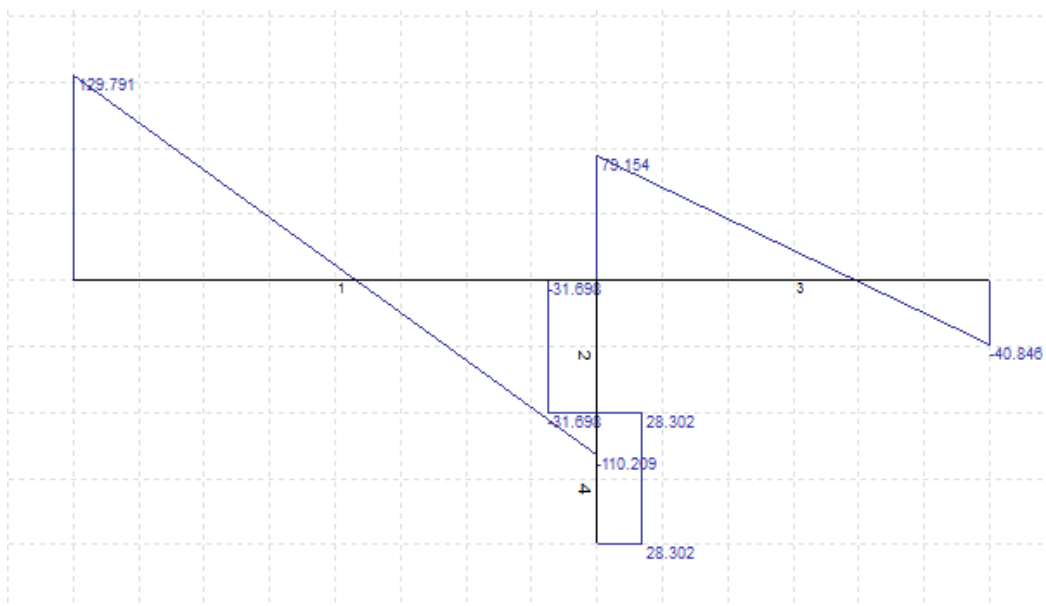
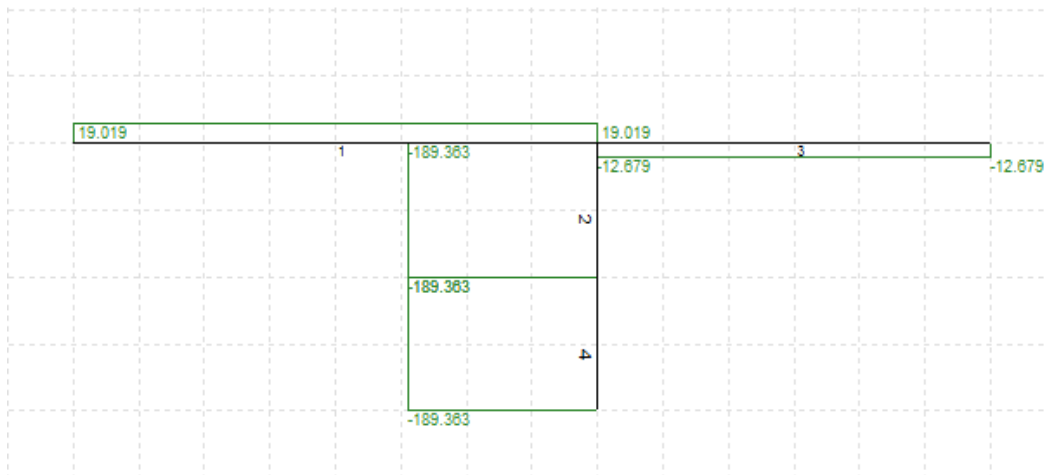
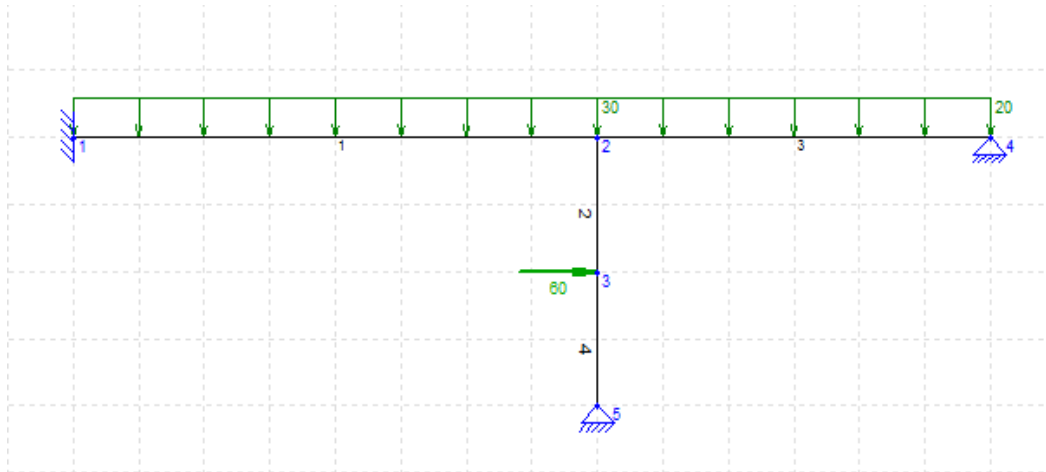
Κόμβος Γ:

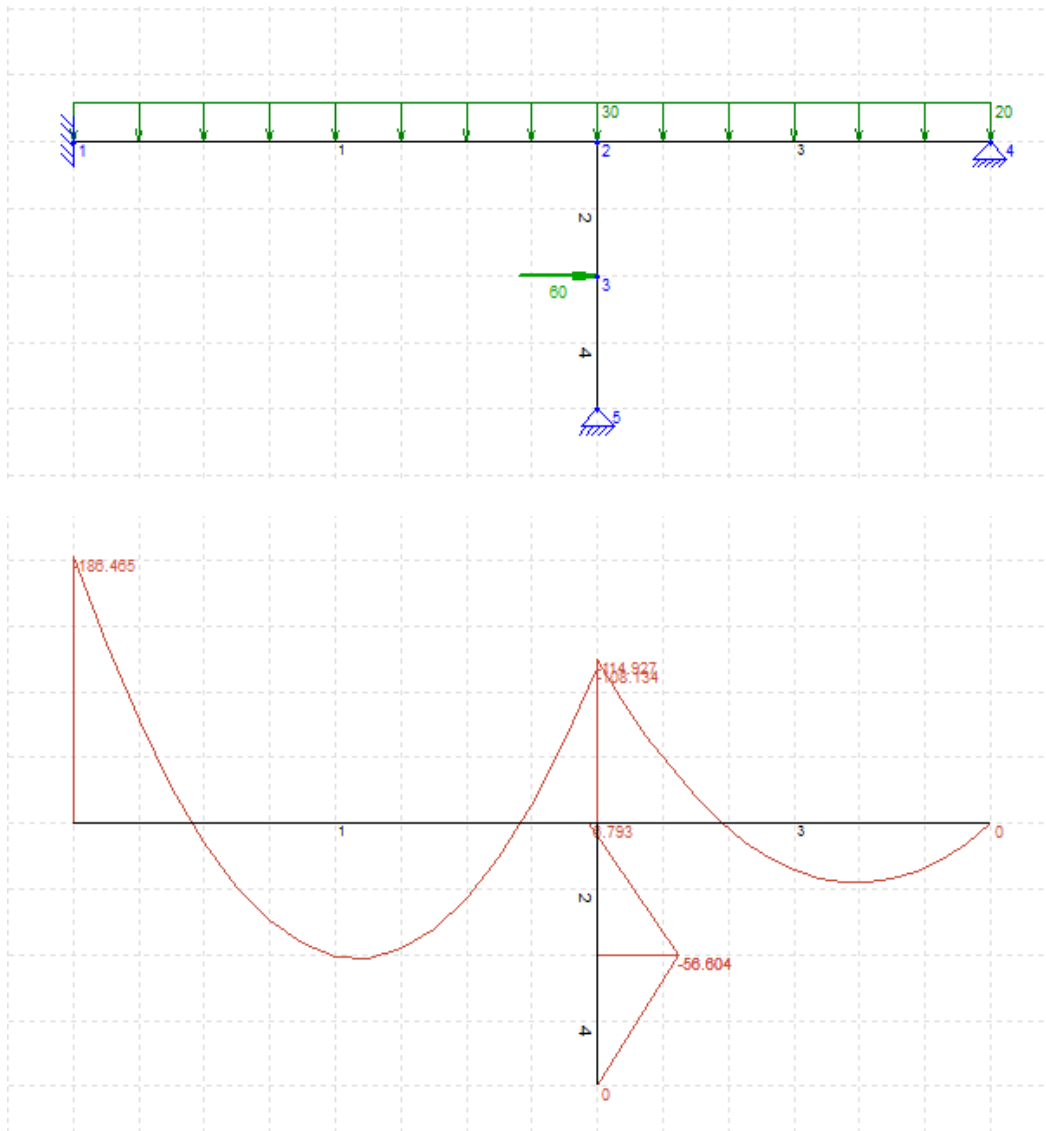
$$\Gamma_y = -Q_{\Gamma\Delta} \Rightarrow \Gamma_y = -\left(\frac{EI\phi}{12} - 45\right) = -\left(\frac{1}{12} \frac{460}{9} - 45\right) \Rightarrow \boxed{\Gamma_y = 40.74 \text{ kN}}$$

Ισορροπία πλαισίου: (έλεγχος ή εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού B_y)

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y + \Gamma_y - 30 \cdot 8 - 20 \cdot 6 = 129.58 \text{ kN} + B_y + 40.74 \text{ kN} - 360 = 0$$

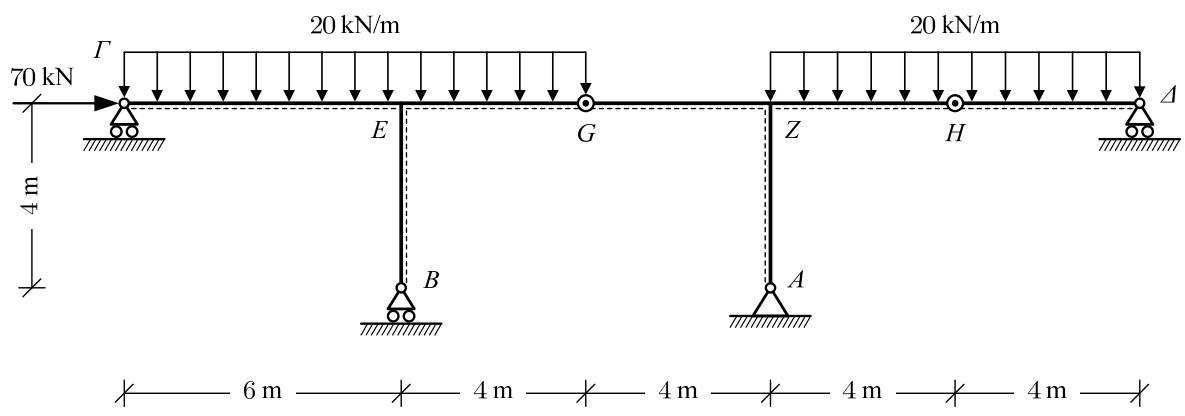
$$\Rightarrow \boxed{B_y = 189.68 \text{ kN}} \quad \checkmark$$



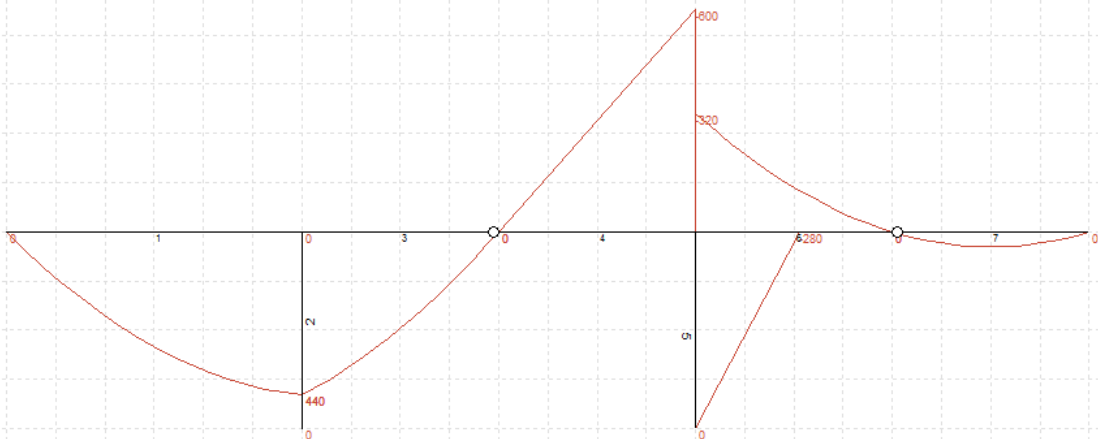
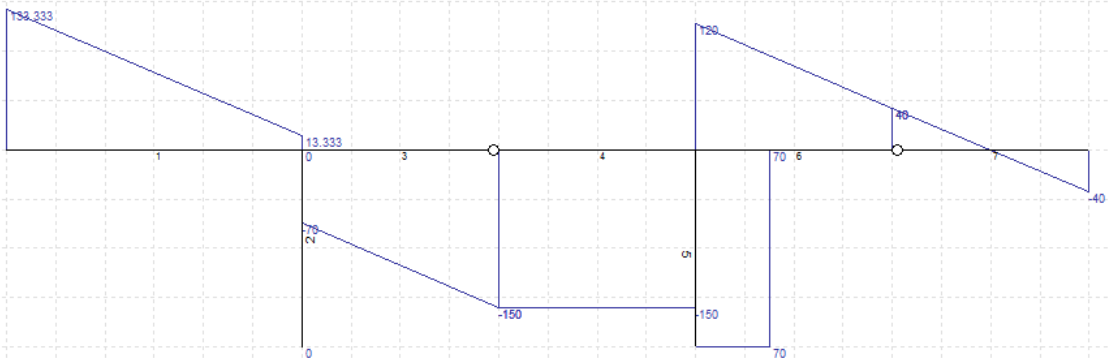
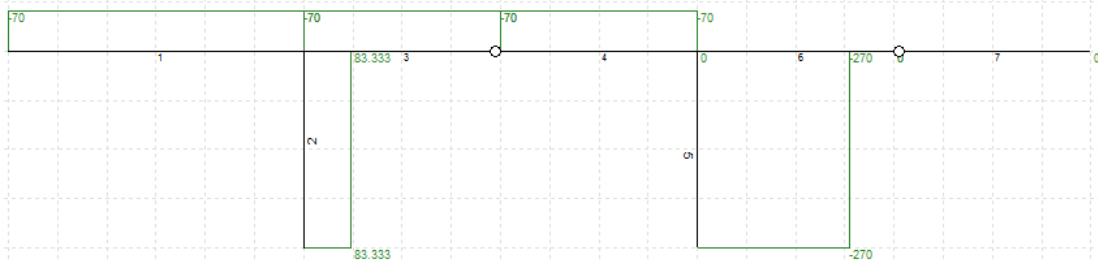
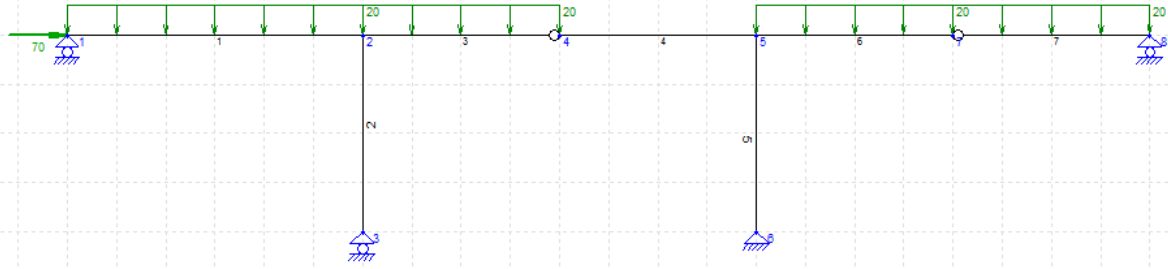


ΘΕΜΑ 2^ο (35%)

Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων [N], τεμνουσών δυνάμεων [Q] και καμπτικών ροπών [M] του παρακάτω πλαισιωτού φορέα. Να υπολογισθούν οι τιμές και οι αντίστοιχες θέσεις της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης στο ζύγωμα ΓΔ (τρεις διαφορετικές τιμές).



$$F_y = 133.33 \text{ kN}, \quad B_y = -83.33 \text{ kN}, \quad A_y = 270 \text{ kN}, \quad \Delta_y = 40 \text{ kN}$$



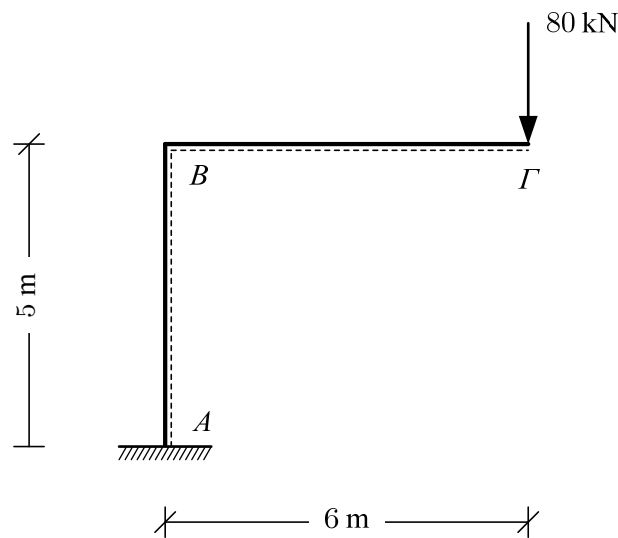
(επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

ΘΕΜΑ 3^ο (30%)

(Α' επιλογή)

Για το πλαίσιο του παρακάτω σχήματος ζητούνται η βύθιση w στο άκρο Γ του προβόλου και η στροφή ϕ στο κόμβο B . Δίνεται $EI = 20000 \text{ kNm}^2$ και οι σχέσεις υπολογισμού των παραμορφώσεων:

$$w \cdot 1 \text{ kN} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dx \quad \text{και} \quad \phi \cdot 1 \text{ kNm} = \int_0^\ell \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$



Τιμές ολοκληρωμάτων $\int_0^\ell M_j M_k dx$			
$\int_0^\ell M_j M_k dx$			
	ℓjk	$\ell \frac{1}{2} jk$	$\ell \frac{1}{2} jk$
	$\ell \frac{1}{2} jk$	$\ell \frac{1}{3} jk$	$\ell \frac{1}{6} jk$
	$\ell \frac{1}{2} jk$	$\ell \frac{1}{6} jk$	$\ell \frac{1}{3} jk$
	$\ell \frac{1}{2} k (j_1 + j_2)$	$\ell \frac{1}{6} k (j_1 + 2j_2)$	$\ell \frac{1}{6} k (2j_1 + j_2)$

(επιλογή ενός εκ των δύο θεμάτων με αριθμό 3)

ΘΕΜΑ 3^ο (30%)

(B' επιλογή)

Για το δικτύωμα του παρακάτω σχήματος να υπολογιστούν οι εσωτερικές δυνάμεις (αξονικές δυνάμεις):

- (α) των μελών 1, 5, 7 και 8 χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ισορροπίας των κόμβων, και
 (β) των μελών 9, 4 και 10 με τη μέθοδο των τομών Ritter.

Για όλα τα μέλη να διευκρινισθεί εάν υπόκεινται σε θλίψη ή εφελκυσμό.

